Задача 11.1. Да се реши неравенството

$$2^{2ax+1} + 2^a \leq 2^{ax} + 2^{ax+a+1},$$

където a е реален параметър.

Решение. След полагане $2^{ax} = y > 0$, получаваме неравенството

$$2y^2 - (2^{a+1} + 1)y + 2^a \leq 0$$

с решение $y \in [\frac{1}{2}; 2^a]$ при $a \geq -1$ и $y \in [2^a; \frac{1}{2}]$ при $a < -1$.

Следователно:

1. При $a < -1$ имаме $2^a \leq 2^{ax} \leq 2^{-1}$, т.е. $a \leq ax \leq -1$, откъдето $1 \geq x \geq -\frac{1}{a}$.
2. При $a = -1$ имаме $2^{-x} = 2^{-1}$, т.е. $x = 1$.
3. При $-1 < a < 0$ имаме $2^{-1} \leq 2^{ax} \leq 2^a$, т.е. $-1 \leq ax \leq a$, откъдето $-\frac{1}{a} \geq x \geq 1$.
4. При $a = 0$ всяко x е решение.
5. При $a > 0$ имаме $2^{-1} \leq 2^{ax} \leq 2^a$, т.е. $-1 \leq ax \leq a$, откъдето $-\frac{1}{a} \leq x \leq 1$.

Оценяване. 1 т. за полагането; 1 т. за намиране на корените на съответното квадратно уравнение; 1 т. за определяне на решенията на неравенството в зависимост от a; 4 т. за довършнване на решението.

Задача 11.2. Нека $a_1 > 1$ и $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n} - 1$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че:

а) редицата (a_n) е сходяща и да се намери нейната граница;

б) съществува n, за което $a_{2n} < 1 + \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

Решение. а) Понеже $a_{n+1} - 1 = \dfrac{(a_n - 1)^2}{a_n} > 0$, то $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{a_n} - 1 < 0$ и значи $a_n > a_{n+1} > 1$. Следователно редицата е сходяща и за нейната граница l имаме, че $l = l + \dfrac{1}{l} - 1$, т.е. $l = 1$.

б) От а) следва, че $a_k \leq 3/2$ за някое k. Тогава от

$$a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n - 1)^2}{a_n} < (a_n - 1)^2$$

по индукция получаваме, че $a_n - 1 < \dfrac{1}{2^{2^{n-k}}}$ при $n > k$. Остава да изберем $n \geq 2k$.

Оценяване. а) по 1 т. за $a_{n+1} > 1$, $a_n > a_{n+1}$ и $l = 1$; б) 1 т. за $a_{n+1} - 1 < (a_{n+1} - 1)^2$, 1 т. $a_n < (a_{n-k} - 1)^{2^{2^{n-k}}}$ и 2 т. за довършване на решението.

Задача 11.3. Дени попълва с ненулево цяло число някой от коефициентите на уравнение от 2010-та степен, след това Вени попълва също с ненулево цяло число друг от коефициентите и т.н., докато бъдат попълнени всичките 2011 коефициента. Дени печели, ако полученото уравнение има целочислен корен, а в противен случай печели Вени. Коя от двете има печеливша стратегия?

Решение. Дени. Тя може да попълва така, че след всяко нейно попълване (без предпоследното) броят на непопълнените коефициенти пред нечетните и пред четните степени да е един и същ. Значи преди предпоследния ѝ ход има само един непопълнен коефициент от едната група, например групата A. Тя го попълва така, че сумата на числата в A да стане ненулева. С последното си попълване Дени може да направи така, че полученото уравнение да има корен 1 или -1. Наистина, в противен случай сумата от всички коефициенти без последния, който трябва да се попълни, например b, би била 0 (това означава, че 1 не може да е корен на уравнението). Също така, разликата на сумите от числата в A и числата в другата група B без самото b също би била 0 (понеже -1 не е корен на уравнението съгласно допускането). Оттук следва, че както сумата на числата в $B \setminus \{b\}$, така и тази на числата в A е 0. Последното вече е противоречие.

Оценяване. 3 т. за стратегията три хода преди края да има само един непопълнен коефициент от едната група и 4 т. за довършване на решението; 1 т. само за твърдение, че има стратегия, при която 1 или -1 е корен на полученото уравнение.

Задача 11.4. Даден е остроъгълен триъгълник ABC за който $\cos \sphericalangle BAC = \frac{1}{3}$. Правата през A, успоредна на медианата BM, $M \in AC$ пресича продължението на височината CC_1, $C_1 \in AB$ в точка D. Ако $CC_1 : C_1D = 2 : 1$, да се намери отношението $\frac{R}{r}$ където R и r са съответно радиусите на описаната и вписаната окръжност за $\triangle ABC$.

Решение. Да означим с N пресечната точка на BM и CC_1. Тъй като MN е успоредна на AD и M е среда на AC, то MN е средна отсечка в $\triangle ADC$. Следователно N е среда на CD и като използваме, че $CC_1 : C_1D = 2 : 1$, лесно получаваме $CN : NC_1 : C_1D = 3 : 1 : 2$.

Ако $AC = 2t$, то $AC_1 = AC \cos \sphericalangle BAC = \frac{2t}{3}$ и от подобието на $\triangle ADC_1$ и BNC_1 намираме $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{DC_1}{NC_1} = 2$, т.е. $BC_1 = \frac{t}{3}$. Сега от косинусовата теорема пресмятаме

$$BC = \sqrt{t^2 + 4t^2 - 4t^2\frac{1}{3}} = t\sqrt{\frac{11}{3}}.$$

Тъй като $\sin \sphericalangle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 \sphericalangle BAC} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, то $R = \frac{BC}{2\sin \sphericalangle BAC} = \frac{t\sqrt{66}}{8}$.

От формулата $r(AB + BC + CA) = AB.AC \sin \sphericalangle BAC$ намираме $r = \dfrac{4t\sqrt{2}}{9+\sqrt{33}}$ и следователно

$$\frac{R}{r} = \frac{9\sqrt{33}+33}{32}.$$

Оценяване. 1 т. за намиране на отношението $CN : NC_1 : C_1D = 3 : 1 : 2$; 1 т. за намиране на $AC = 2AB$; 1 т. за пресмятане на BC; 1 т. за пресмятане на $\sin \sphericalangle BAC$; по 1 т. за пресмятане на R и r; 1 т. за довършване на решението.

Задача 11.5. Клетките на таблица с 2009 реда и 2011 стълба са оцветени шахматно. Да се намери най-голямото естествено число k със следното свойство. При изтриване на произволни k клетки на таблицата, така че измежду неизтритите клетки има равен брой бели и черни, останалата част от таблицата (т.е. неизтритите клетки) може да се покрие с домина. (Доминото се състои от две клетки с обща страна).

Решение. Ще докажем, че за всяка таблица с нечетни страни търсеното число е $k = 3$. Без ограничение можем да считаме, че четирите ъглови клетки са черни. Ясно е, че k трябва да е нечетно число и ако $k \geq 5$ то трябва да изтрием поне 2 бели и 3 черни клетки. Ако изтрием двете бели съседни клетки на коя да е ъглова, то тази ъглова клетка остава изолирана и не може да се покрие от домино. Следователно $k \leq 3$.

Остава да докажем, че както и да изтрием 2 черни и една бяла клетка останалата част от дъската може да се покрие с домина. За дъска 3×3 това се проверява директно. Сега да разгледаме дъска $2p + 1 \times 2q + 1$, за която поне едно от p и q е по-голямо от 1 и от която сме изтрили 2 черни и една бяла клетка. Без ограничение $q > 1$ и да разгледаме двете ивици, съставени от първите два и от последните два стълба. Ако в някой от тях няма изтрита клетка, твърдението следва по индукция. Ако и в двете има изтрита клетка, то в едната ивица има само една изтрита клетка. Без ограничение нека това е ивицата от първите два стълба. Ако изтритата клетка е в първия стълб, то поставяме хоризонтални домина в тази ивица, като само доминото в реда на изтритата клетка ще покрива клетка със същия цвят от останалата част на таблицата. Ако изтритата клетка е във втория стълб, използваме едно вертикално домино и едно хоризонтално домино, като отново покриваме една клетка със същия цвят от останалата част от таблицата. И в двата случая твърдението следва по индукция.

Оценяване. 1 т. за посочване на отговора; 1 т. за започване на доказателство с индукция или друг подход; 5 т. за вярна индукция или довършване на решението по друг начин.

Задача 11.6. Нека $f(x)$ е полином с цели коефициенти и n е дадено естествено число. Известно е, че за всеки две цели числа a и b, за които $a - b$ се дели на n, числата $f(a)$ и $f(b)$ не са взаимно прости. Да се докаже, че съществува просто число p, за което p дели $f(x)$ за всяко цяло число x.

Решение. Да допуснем, че просто число със свойството от условието не съществува. Първо ще докажем, че за произволни прости числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$ съществува цяло число b, за което $f(b)$ не се дели на p_i за всяко $i = 1, 2, \ldots, k$.

Наистина, от допускането следва, че за всяко $i = 1, 2, \ldots, k$ съществува x_i, за което $f(x_i)$ не се дели на p_i. Според китайската теорема за остатъците съществува число $b \equiv x_i \pmod{p_i}$ и тогава $f(b) \equiv f(x_i) \not\equiv 0 \pmod{p_i}$.

Нека $p_1, p_2, \ldots, p_k$ са простите делители на n. Според доказаното свойство съществува число b, за което $f(b)$ не се дели на p_i за всяко $i = 1, 2, \ldots, k$. Нека $q_1, q_2, \ldots q_l$ са простите делители на $f(b)$. Отново от доказаното свойство следва, че съществува c за което $f(c)$ не се дели на никое от числата $q_1, q_2, \ldots q_l$. Тъй като $q_1 q_2 \ldots q_l$ е взаимно просто с n, то сравнението $q_1 q_2 \ldots q_l x \equiv b - c \pmod{n}$ има решение. Тогава, ако $a = q_1 q_2 \ldots q_l x + c$, то $a \equiv b \pmod{n}$ и $f(a) \equiv f(c) \not\equiv 0 \pmod{q_i}$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, l$. Това означава, че $f(a)$ и $f(b)$ са взаимно прости, което е противоречие с условието.

Следователно съществува просто число p, за което p дели $f(x)$ за всяко цяло число x.

Оценяване. 3 т. за доказване, че за произволни прости числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$ съществува цяло число b, за което $f(b)$ не се дели на p_i за всяко $i = 1, 2, \ldots, k$; 3 т. за намиране на числото c от решението; 1 т. за довършване на решението.

Задачите са предложени от: Емил Колев – 11.1, 11.4, 11.5, Николай Николов – 11.2, 11.3, Александър Иванов – 11.6.