

Министерство на образованието, младежта и науката

59. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 17 април 2010 г.

Тема за 9. клас

Задача 1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2 + (\sqrt{a+1} - a)x - 1 = 0$ са реални и удовлетворяват равенството

$$x_1^2 + x_2^2 + a^2 = 2a(x_1 + x_2) + 2 + \sqrt{a^3 + a^2 - 14a + 25}.$$

Задача 2. В даден четириъгълник $ABCD$ може да се впише окръжност k , която се допира до страните AB , BC , CD и DA в точките M , N , P и Q съответно. Нека S е средата на хордата, получена от пресичането на диагонала AC с окръжността k . Да се докаже, че е изпълнено равенството

$$SM.SQ = SN.SP.$$

Задача 3. Върху успоредните прави a и b са взети съответно точките A_1 , A_2 , A_3 , A_4 и B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , които са две по две различни. Да се намери минималният възможен брой различни точки, получени при пресичането на отсечките A_iB_j , $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4$. (Включително самите точки A_1 , A_2 , A_3 , A_4 и B_1 , B_2 , B_3 , B_4 .)

Време за работа: 4 часа и 30 минути.