59. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 17-18.04.2010 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2+(\sqrt{a+1}-a)x-1=0$ са реални и удовлетворяват равенството

$$x_1^2+x_2^2+a^2=2a(x_1+x_2)+2+\sqrt{a^3+a^2-14a+25}.$$

Решение. Уравнението има смисъл и корените му са реални за всяко $a \geq -1$. Да означим за краткост $g(a)=a^3+a^2-14a+25$. Даденото условие може да се запише във вида

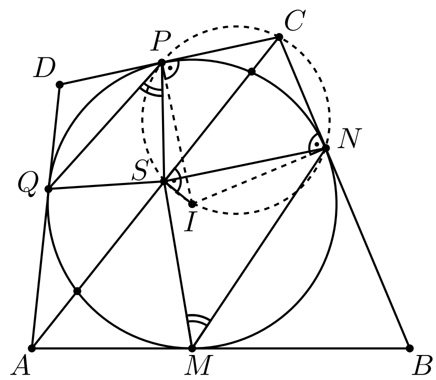
$$(x_1+x_2-a)^2=\sqrt{g(a)},$$

което е еквивалентно на уравнението $a+1=\sqrt{g(a)}$. След повдигане на квадрат получаваме $a^3-16a+24=0 \iff (a-2)(a^2+2a-12)=0$ с корени $a_1=2$, $a_2=-1+\sqrt{13}$ и $a_3=-1-\sqrt{13}$. Тъй като $a_3<-1<a_1<a_2$, $g(a_1)=(a_1+1)^2 \geqq 0$ и $g(a_2)=(a_2+1)^2 \geqq 0$, то $a_1=2$ и $a_2=-1+\sqrt{13}$ са единствените решения на задачата.

Инструкции за оценяване. 1 т. за определяне на $a \geq -1$, като достатъчно условие за реални корени; **2 т.** за достигане до уравнението $a+1=\sqrt{a^3+a^2-14a+25}$ (директно с формули на Виет или както по-горе); **2 т.** за получаване и решаване на уравнението $(a-2)(a^2+2a-12)=0$; **2 т.** за проверка на трите корена и достигане до двете решения.

Задача 9.2. В даден четириъгълник $ABCD$ може да се впише окръжност k, която се допира до страните AB, BC, CD и DA в точките M, N, P и Q съответно. Нека S е средата на хордата, получена от пресичането на диагонала AC с окръжността k. Да се докаже, че е изпълнено равенството $SM.SQ=SN.SP$.

Решение. Нека I е центъра на окръжността k и да въведем стандартните означения за ъглите на четириъгълника с α, β, γ и δ. Ще покажем, че $\triangle MNS \sim \triangle PQS$ откъдето следва, че $\dfrac{SM}{SP} = \dfrac{SN}{SQ}$, т.е. $SM.SQ = SN.SP$. Тъй като S е среда на хорда в k, лежаща на правата AC, то $\sphericalangle ISC = 90^\circ$. От друга страна $\sphericalangle IPC = \sphericalangle INC = 90^\circ$ и следователно точките I, N, C, P и S лежат на окръжност с диаметър CI. Тогава $\sphericalangle NSC = \sphericalangle CSP = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$ и аналогично $\sphericalangle MSA = \sphericalangle QSA = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$.



Следователно $\sphericalangle MSN = \sphericalangle PSQ = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$. Освен това

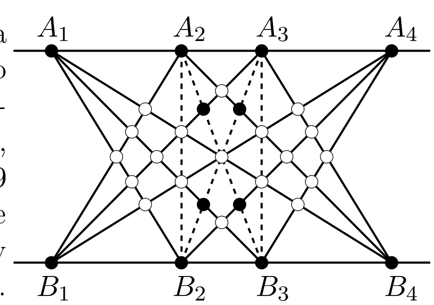
$$\begin{aligned}
\sphericalangle SPQ &= \sphericalangle SPD - \sphericalangle QPD = \sphericalangle SNC - \left(90^\circ - \frac{\delta}{2}\right) = (180^\circ - \sphericalangle SNB) - \left(90^\circ - \frac{\delta}{2}\right) = \\
&= (180^\circ - \sphericalangle SNM) - \sphericalangle MNB - \left(90^\circ - \frac{\delta}{2}\right) = \\
&= \sphericalangle NMS + \sphericalangle MSN - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\delta}{2}\right) = \\
&= \sphericalangle NMS + \frac{\alpha+\gamma}{2} - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\delta}{2}\right) = \sphericalangle NMS
\end{aligned}$$

и с това доказателството е завършено.

Инструкции за оценяване. 1 т. за свеждане на задачата до $\triangle MNS \sim \triangle PQS$; **1 т.** за построяване на центъра I и доказване, че $IS \perp AC$; **1 т.** за доказване, че точките I, N, C, P и S лежат на една окръжност; **2 т.** за $\sphericalangle MSN = \sphericalangle PSQ$; **2 т.** за $\sphericalangle SPQ = \sphericalangle NMS$.

Задача 9.3. Върху успоредните прави a и b са взети съответно точките A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2, B_3, B_4, които са две по две различни. Да се намери минималният възможен брой различни точки, получени при пресичането на отсечките A_iB_j, $i = 1,2,3,4$; $j = 1,2,3,4$. (Включително самите точки A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2, B_3, B_4.)

Решение. Нека точките върху правата a са разположени в реда A_1, A_2, A_3, A_4 отляво надясно и аналогично за точките B_1, B_2, B_3, B_4 върху b. Тогава 10-те отсечки A_1B_i, $i = 2,3,4$, A_2B_j, $j = 1,4$, A_3B_k, $k = 1,4$ и A_4B_m, $m = 1,2,3$, определят 19 различни пресечни точки (по 3 върху отсечките A_1B_2 и A_3B_4, по 4 върху A_1B_3 и A_2B_4 и 5 върху A_1B_4 – означени, като „празни“ точки на чертежа).



Отсечките, които все още не сме разгледали са A_2B_2, A_2B_3, A_3B_2 и A_3B_3. Остава да съобразим, че върху всяка една от отсечките A_2B_3 и A_3B_2 съществуват по още поне 2 нови пресечни точки, различни по между си и различни от горните 19. Като добавим и дадените осем точки върху правите a и b достигаме до поне $19+2+2+8 = 31$ пресечни точки.

Ще покажем, че може да се построи желана конфигурация с точно 31 пресечни точки. Нека за целта разположим точките, така че отсечките A_iB_i да са перпендикулярни на правите a и b, $A_1A_2 = A_3A_4 = x$ и $A_2A_3 = y$. Тогава $B_1B_2 = B_3B_4 = x$ и $B_2B_3 = y$. Ще търсим отношението $x : y$, така че правата A_2B_2 да минава през пресечната точка P на отсечките A_1B_4 и A_3B_1. За целта използваме двойките подобни триъгълници $\triangle A_1A_2P$ и $\triangle B_2B_4P$, както и триъгълниците $\triangle A_2A_3P$ и $\triangle B_1B_2P$. След съответните пресмятания достигаме до равенството $x^2 - xy - y^2 = 0$, т.е. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $A_1A_2 = A_3A_4 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}A_2A_3$. От съображение за симетрия, в този случай получаваме, че отсечката A_2B_2 минава през пресечната точка на отсечките A_1B_3 и B_1A_4, т.е. отсечката A_2B_2 не носи нови пресечни точки различни от горните 19. Аналогично и отсечката A_3B_3 няма да носи нови точки и вече лесно се вижда, че останалите две отсечки A_2B_3 и A_3B_2 ще донесат точно 4 нови точки, което ни води и до търсеният брой.

Инструкции за оценяване. 4 т. за минималната оценка (2 т. са за намиране на 19 вътрешни пресечни точки и 2 т. за останалите 4 точки); **3 т.** за конструкцията.

Задача 9.4. Да се реши системата

$$\left| \begin{array}{rcl} x + ay^2 + a^2z^2 &=& a^2 \\ x + by^2 + b^2z^2 &=& b^2 \\ x + cy^2 + c^2z^2 &=& c^2, \end{array} \right.$$

където a, b и c са реални параметри ($a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$).

Решение. Нека един от параметрите, например a, е равен на 0. Тогава $x = 0$ от първото уравнение, а от другите две уравнения получаваме системата

$$\left| \begin{array}{rcl} y^2 + bz^2 &=& b \\ y^2 + cz^2 &=& c, \end{array} \right.$$

откъдето лесно намираме $y^2 = 0$ и $z^2 = 1$, т.е. $y = 0$ и $z = \pm 1$.

Нека сега $abc \neq 0$. Тогава след изразяване на $z^2 - 1$ от трите уравнения получаваме системата $\dfrac{x+ay^2}{a^2} = \dfrac{x+by^2}{b^2} = \dfrac{x+cy^2}{c^2}$. Следователно

$$\left| \begin{array}{rcl} x(b^2-a^2) + ab(b-a)y^2 &=& 0 \\ x(c^2-a^2) + ac(c-a)y^2 &=& 0 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{rcl} x(a+b) + aby^2 &=& 0 \\ x(a+c) + acy^2 &=& 0 \end{array} \right. .$$

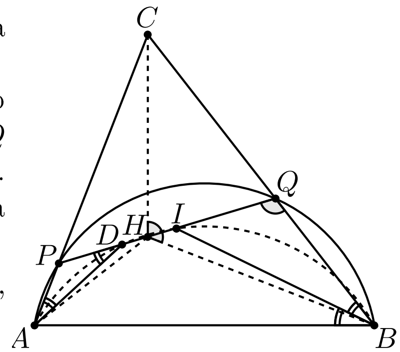
В последната система умножаваме първото уравнение с c, второто с b и ги изваждаме, за да получим $ax(c-b) = 0$, откъдето $x = 0$. Тогава $y = 0$ и $z^2 = 1$, т.е. отново достигаме до решенията $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1)$.

Инструкции за оценяване. 2 т. за случая $abc = 0$; **5 т.** за случая $abc \neq 0$ (3 т. за достигане до система с две уравнения и две неизвестни и 2 т. за решаването на тази система). При други решение (например елиминация на едно от неизвестните) без разглеждане на $abc = 0$ – 4 т. и 3 т. за довършване.

Задача 9.5. Даден е $\triangle ABC$ с ортоцентър H и център на вписаната окръжност I. Окръжност, минаваща през върховете A и B пресича страните CA и CB за втори път в точките P и Q съответно.

а) Ако I лежи на отсечката PQ, да се докаже, че $AP + BQ = PQ$;

б) Ако H лежи на отсечката PQ, да се докаже, че $\dfrac{AP}{AH} + \dfrac{BQ}{BH} = \dfrac{PQ}{CH}$.



Решение. Да въведем стандартните означения за ъглите на $\triangle ABC$ с α, β и γ.
а) Нека I лежи на отсечката PQ и описаната около $\triangle ABI$ окръжност k пресича за втори път правата PQ в точка D (възможно е $D \equiv I$, ако k се допира до PQ). Без ограничение на общността нека $D \in IP^{\rightarrow}$ и тогава

$$\sphericalangle ADI = 180^\circ - \sphericalangle ABI = 180^\circ - \frac{\beta}{2} > 180^\circ - \beta = \sphericalangle APQ,$$

т.е. D е вътрешна точка за отсечката IP.

От $\sphericalangle ADP = \sphericalangle ABI = \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{2} \sphericalangle DPC$ следва, че $\triangle ADP$ е равнобедрен и $AP = PD$. Аналогично $BQ = DQ$ и следователно $AP + BQ = PD + DQ = PQ$.

б) Нека H лежи на отсечката PQ. Тъй като $\sphericalangle BQH = 180^\circ - \alpha = \sphericalangle BHC$, то $\triangle BQH \sim \triangle BHC$ и $\dfrac{BQ}{BH} = \dfrac{QH}{CH}$. Аналогично $\triangle APH \sim \triangle AHC$ и $\dfrac{AP}{AH} = \dfrac{PH}{CH}$. Като съберем тези две равенства получаваме $\dfrac{AP}{AH} + \dfrac{BQ}{BH} = \dfrac{PQ}{CH}$.

Забележка: Доказаните равенства в а) и б) се оказват достатъчни условия за колинеарност на точките P, Q, I и P, Q, H съответно.

Инструкции за оценяване. а) **1 т.** за построяване на точката D (възможно е да се построи и като $PD = PA$); **1 т.** за доказване, че D е вътрешна за отсечката PQ; **2 т.** за достигане до равенството $AP + BQ = PQ$; б) **1 т.** за откриване на подобието $\triangle BQH \sim \triangle BHC$; **2 т.** за достигане до равенството $\dfrac{AP}{AH} + \dfrac{BQ}{BH} = \dfrac{PQ}{CH}$.

Задача 9.6. Нека n е естествено число. Да се намери най-малкото естествено число k, за което съществуват естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, такива че

$$7.2^n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2.$$

Решение. Очевидно $k > 1$. Нека $k = 2$. Ако $7 \mid a_1$ и $7 \mid a_2$, то $7 \mid a_1^2 + a_2^2$ и оттук $7^2 \mid 7.2^n$, което е невъзможно. Нека $7 \nmid a_1$ и тогава очевидно $7 \nmid a_2$. Сега от $a_1^2 + a_2^2 \equiv 0 \pmod 7$ или $a_1^2 \equiv -a_2^2 \pmod 7$ следва $a_1^6 \equiv -a_2^6 \pmod 7$ и (от теоремата на Ферма) $1 \equiv -1 \pmod 7$ – противоречие.

Нека $k = 3$. Ако $n > 1$, то $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \equiv 0 \pmod 4$, откъдето лесно следва, че a_1, a_2, a_3 са четни числа. Тогава $a_1 = 2b_1, a_2 = 2b_2, a_3 = 2b_3$ $(b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{N})$ и $7.2^{n-2} =$

$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$. Продължавайки по точи начин заключаваме, че 7.2^2 или 7.2 трябва да е сума на три квадрата. Непосредствено се проверява, че това не е изпълнено за $7.2^2 = 28$ и следователно не е изпълнено за 7.2^n при четно n. От друга страна, $7.2 = 14 = 3^2 + 2^2 + 1^2$, което ни подсеща при нечетно $n = 2m + 1$ да изберем $a_1 = 3.2^m, a_2 = 2.2^m, a_3 = 1.2^m$ и тогава $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 14.2^{2m} = 7.2^n$.

Нека $n = 2m$ е четно и $k = 4$. Аналогично на горното, тъй като $7 = 2^2+1^2+1^2+1^2$, избираме $a_1 = 2^{m+1}$, $a_2 = a_3 = a_4 = 2^m$ и получаваме $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2 = 7.2^{2m} = 7.2^n$.

Окончателно, $k = 3$ за нечетно n и $k = 4$ за четно n.

Инструкции за оценяване. 1 т. за случая $k = 2$; **2 т.** за случая $k = 3$, $2 \mid n$; **2 т.** за случая $k = 3$, $2 \nmid n$; **2 т.** за случая $k = 4$, $2 \mid n$. (Не се зачита цитирането без доказателство на факти относно представянето на естествените числа като сума на няколко квадрата.)

Задача 10.1 Да се реши уравнението

$$20^{x^2}.10^x = 2$$

Решение. Записваме уравнението във вида

$$2^{x^2-1}.10^{x^2+x} = 1,$$

което е еквивалентно с уравнението

$$(2^{x-1}.10^x)^{x+1} = 1.$$

Имаме две възможности $x + 1 = 0$ или $2^{x-1}.10^x = 1$. При първата достигаме до решението $x_1 = -1$, а при втората достигаме до уравнението $20^x = 2$, което ни води до решението $x_2 = \log_{20} 2$.

Окончателно получаваме решенията $x_1 = -1$ и $x_2 = \log_{20} 2$.

Инструкции за оценяване: **1 т.** за свеждане до уравнението $2^{x^2-1}.10^{x^2+x} = 1$; **1 т.** за свеждане до уравнението $(2^{x-1}.10^x)^{x+1} = 1$; **2 т.** за случая $x+1 = 0$ и достигане до решението $x_1 = -1$; 1 т. за случая $2^{x-1}.10^x = 1$; **1 т.** за достигане до уравнението $20^x = 2$; **1 т.** за достигане до решението $x_2 = \log_{20} 2$;

Задача 10.2. Външновписаната окръжност към страната AB на $\triangle ABC$ се допира до AB в точка D. Ако $\sphericalangle CAB = 2 \sphericalangle CDA$, да се намери стойността на отношението $AD : BD$.

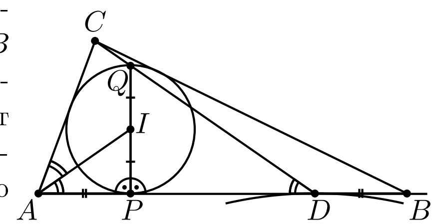
Решение. *(Тригонометричен подход)* Ще използваме стандартните означения за страните на $\triangle ABC$ и нека $\sphericalangle ADC = \varphi$. От синусова теорема за $\triangle ACD$ получаваме $CD = \dfrac{b \sin 2\varphi}{\sin \varphi} = 2b \cos \varphi$. Оттук и от косинусова теорема за $\triangle ADC$ имаме

$$4b^2 \cos^2 \varphi = b^2+(p-b)^2-2b(p-b) \cos 2\varphi \iff 2b^2 \cos 2\varphi = -b^2+(p-b)^2-2b(p-b) \cos 2\varphi,$$

откъдето намираме $\cos 2\varphi = \dfrac{p-2b}{2b}$. От косинусова теорема за $\triangle ABC$ получаваме

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\frac{(p-2b)}{2b} \iff a^2 = (b+c)^2 - pc \iff a - b = \frac{c}{2}.$$

Остава да пресметнем $BD = p - a = \dfrac{b+c-a}{2} = \dfrac{c}{4}$ и следователно $AD : BD = 3 : 1$.



(Синтетичен подход) Нека вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k е с център I и се допира до страната AB в точка P. Ако означим с Q диаметрално противоположната точка на P в k, то добре известен факт е, че точките C, Q и D са колинеарни. (Класическото доказателство е с хомотетия, с център C, която изпраща k във външновписаната окръжност.)

Тогава $\sphericalangle IAP = \frac{1}{2} \sphericalangle CAB = \sphericalangle CDA$, т.е. правоъгълните триъгълници $\triangle IPA$ и $\triangle QPD$ са подобни и $PD : PA = PQ : PI = 2 : 1$. От друга страна $PA = BD$ и следователно $AD : BD = 3 : 1$.

Инструкции за оценяване: *(Тригонометричен подход)* **1 т.** за въвеждането на помощен ъгъл $\sphericalangle ADC = \varphi$, **1 т.** за прилагане на синусова теорема за $\triangle ADC$ и намиране $CD = 2b\cos\varphi$; **2 т.** за прилагане на косинусова теорема за $\triangle ADC$ и намиране на $\cos 2\varphi = \dfrac{p-2b}{2b}$; **2 т.** за прилагане на косинусова теорема за $\triangle ABC$ и достигане до равенството $a - b = \frac{c}{2}$; **1 т.** за достигане до отговора.

(Синтетичен подход) **1 т.** за построяване на вписаната окръжност; **2 т.** за въвеждане на точката Q и отчитане на факта, че $Q \in CD$; **1 т**. за доказателство на факта, че $Q \in CD$; **1 т.** за $\triangle IPA \sim \triangle QPD$; **2 т.** за достигане до отговора.

Задача 10.3. Виж задача 9.3.

Задача 10.4. Да се намерят всички естествени числа n, такива че за всяко x е изпълнено равенството:

$$(\sin x)^{2n} + (\cos x)^{2n} + n\sin^2 x\cos^2 x = 1.$$

Решение. При $x = \dfrac{\pi}{4}$ даденото равенство придобива вида $\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{n}{4} = 1$ и оттук получаваме $1 + (n-4)2^{n-3} = 0$. Ако $n \geqq 4$, това равенство не е изпълнено, понеже $1 + (n-4)2^{n-3} > 0$. Ако $n \leqq 3$, проверката показва, че то е изпълнено само при $n = 2$ и $n = 3$ и ще докажем, че при тези стойности даденото равенство е тъждество.

При $n = 2$ имаме $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1,$ за всяко x.

При $n = 3$ имаме $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) + 3\sin^2 x\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^2 x = 1$, за всяко x

Следователно търсените естествени числа са $n = 2$ и $n = 3$.

Инструкции за оценяване: **2 т.** за достигане до $1 + (n-4)2^{n-3} = 0$ (или друго равенство от този вид); **2 т.** за показване, че това равенство е изпълнено само при $n = 2$ и $n = 3$; **1 т.** за доказване, че при $n = 2$ даденото равенство е изпълнено за всяко x; **2 т.** за доказване, че при $n = 3$ даденото равенство е изпълнено за всяко x.

Задача 10.5. Виж задача 9.5.

Задача 10.6. Виж задача 9.6.

Автори на задачите:

Петър Бойваленков – 9.1, 9.4;

Иван Тонов – 9.3(10.3), 10.2;

Стоян Боев – 9.2, 9.5(10.5), 10.1;

Кероре Чакърян – 9.6(10.6), 10.4.