Министерство на образованието, младежта и науката

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 12-13.03.2011 г.
Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 11.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$3^{\cos x} + 3^{1-\cos x} = a$$

има точно едно решение в интервала $[0, \pi]$.

Решение. След полагане $t = 3^{\cos x}$, получаваме уравнението $t^2 - at + 3 = 0$. За да има уравнението от условието точно едно решение в интервала $[0, \pi]$, уравнението $f(t) = t^2 - at + 3 = 0$ трябва да има единствено решение в интервала $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

Когато $D = a^2 - 12 = 0$, получаваме $a = \pm 2\sqrt{3}$ и тогава двата корена са съответно $\pm\sqrt{3}$. Тъй като само $\sqrt{3} \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$, то $a = 2\sqrt{3}$ е решение на задачата.

Ако $t = \frac{1}{3}$ е решение, то $a = \frac{28}{3}$ и тогава другият корен е $t = 9 \notin \left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Това означава, че $a = \frac{28}{3}$ е решение на задачата.

Ако $t = 3$ е решение, то $a = 4$ и тогава другият корен е $t = 1 \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Това означава, че $a = 4$ не е решение на задачата.

Когато решението е в $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ трябва да имаме $f\left(\frac{1}{3}\right) f(3) < 0$ което дава $a \in \left(4, \frac{28}{3}\right)$.

Окончателно решението е $a \in \{2\sqrt{3}\} \cup \left(4, \frac{28}{3}\right]$.

Оценяване. За полагане и свеждане до уравнение за t – 2 т.; за $D = 0$ – 1 т.; за двата случая $t = \frac{1}{3}$ и $t = 3$ – по 1 т.; за случая $t \in \left(\frac{1}{3}, 3\right)$ – 2т.

Задача 11.2. Точките O и I са съответно център на описаната и вписаната окръжност за триъгълник ABC. Ъглополовящата на ъгъл ACB пресича описаната около триъгълника окръжност в точка D. Ако $OI = r$ и $ID = 2r$, където r е радиусът на вписаната окръжност, да се намери $\sin \sphericalangle ACB$.

Решение. Тъй като $DI = DA$ (следва от $\sphericalangle DIA = \sphericalangle DAI = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$), то от синусовата теорема получаваме $r = R\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

От $r^2 = OI^2 = R^2 - 2Rr$ след заместване $r = R\sin\frac{\gamma}{2}$, намираме

$$\sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2} - 1 = 0.$$

Оттук последователно намираме $\sin\dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{2}-1$, $\cos\dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{1-(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ и

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \left(2(\sqrt{2}-1)\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Оценяване. За $r = R\sin\dfrac{\gamma}{2}$ – 2 т.; за използване на $r^2 = OI^2 = R^2 - 2Rr$ – 2 т.; за получаване на уравнение за $\sin\frac{\gamma}{2}$ – 1 т.; за пресмятане на $\sin \sphericalangle ACB$ – 2т.

Задача 11.3. Дадени са естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Да се докаже, че твърдението:

За всяко естествено число n произведението $\dbinom{n}{a_1}\dbinom{n}{a_2}\ldots\dbinom{n}{a_{2011}}$ се дели на n, е вярно тогава и само тогава, когато най-големия общ делител на числата $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ е равен на 1.

Решение. Нека $(a_1, a_2, \ldots a_{2011}) = 1$ и $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_t^{\alpha_t}$. Ясно е, че за всяко i съществува a_s, което не се дели на p_i. Тогава $\dbinom{n}{a_s} = \dfrac{n}{a_s}\dbinom{n-1}{a_s-1}$ се дели на $p_i^{\alpha_i}$, т.е. n дели произведението от условието.

Обратно, да допуснем, че съществува просто число p, което дели всяко от числата $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Ще покажем, че съществува естествено число n, за което p дели n, но p не дели $\binom{n}{a_i}$ за всяко i. Да разгледаме числата от вида $n = p^k - p$ и да разгледаме например $\dbinom{n}{a_1}$. Нека $a_1 = pa$. Имаме

$$\binom{n}{a_1} = \binom{p^k-p}{pa} = \frac{(p^k-p)(p^k-p-1)\ldots(p^k-p-pa+1)}{pa(pa-1)(pa-2)\ldots(pa-(pa-1))}.$$

Тъй като k може да бъде избрано произволно голямо, то най-високата степен на p, която дели числителя, е равна на най-високата степен на p, която дели произведението

$$p(p+1)(p+2)\ldots(p+pa-1).$$

Отделяме множителите, които се делят на p, и получаваме

$$p(p+p)(p+2p)\dots(p+(a-1)p)=p^a 1.2.3\dots a.$$

В знаменателя също отделяме множителите, които се делят на p и получаваме

$$pa(pa-p)(pa-2p)\dots(pa-(a-1)p)=p^a a(a-1)(a-2)\dots 1.$$

Оттук следва, че $\binom{n}{a_1}$ не се дели на p. Аналогично доказваме, че за всяко i числото $\binom{n}{a_i}$ не се дели на p, което означава, че разглежданото произведение не се дели на n.

Оценяване. За случая $(a_1, a_2, \dots a_{2011}) = 1$ – 3 т.; за обратната посока – 4 т.

Задача 11.4. Колко най-малко три елементни подмножества на множеството $A=\{1,2,\dots,8\}$ трябва да се изберат така, че всеки два елемента на A да са едновременно елементи на поне едно от избраните множества?

Решение. Всяка от седемте двойки $(1,2),(1,3),\dots,(1,8)$ трябва да се среща в някое от избраните множества. Тъй като в едно три елементно множество се срещат най-много две от тези двойки, следва, че числото 1 се среща в поне 4 множества. Това е вярно за всяко от останалите числа. Тогава общо във всички множества трябва да има поне $8.4=32$ елемента. Това означава, че са ни необходими поне $\left\lceil \frac{32}{3} \right\rceil = 11$ множества.

Тъй като дадените 11 множества имат исканото свойство, то отговорът е 11.

$$\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{1,6,7\},\{1,2,8\},\{2,4,6\},\{2,5,7\},\{2,3,8\},\{3,4,7\},\{3,5,6\},\{4,5,8\},\{6,7,8\}.$$

Оценяване. За оценката, че са необходими поне 11 множества – 4 т.; за пример, че 11 множества са достатъчни – 3 т.

Задача 11.5. Да се намерят всички функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такива, че за произволни x,y,z, е изпълнено неравенството

$$(f(x)+f(y)-2f(xy)).(f(x)+f(z)-2f(xz))\ge 0.$$

Решение. (1 т.) При $y=0$ и $z=1$ следва, че $(f(x)-f(0)).(f(x)-f(1))\le 0$, т.е. $f(0)\le f(x)\le f(1)$ или $f(1)\le f(x)\le f(0)$ за всяко x.

(4 т.) Да предположим, че f не е константа. Ако $f(0)\le f(x)<f(1)$ или $f(1)<f(x)\le f(0)$ за някое $x\ne 0$, то при $y=1/x$ и $z=1$ следва, че $f(1)+f(1)>f(a)+f(1/a)\ge 2f(1)$ или $f(1)+f(1)<f(a)+f(1/a)\le 2f(1)$ което е противоречие. Значи $f(x)=f(1)$ при $x\ne 0$.

(2 т.) Проверка показва, че всяка такава функция изпълнява даденото неравенство.

Задача 11.6. Дадено е естествено число a. Да се докаже, че множеството от простите делители на редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, за която $x_n = n^{2^{2011}} - a^2$, е безкрайно.

Решение. Нека $p = 4k + 3$ е произволно просто число. Ще докажем, че съществува член на редицата, който се дели на p. Да разгледаме числата $1^{2^m}, 2^{2^m}, \ldots, p^{2^m}$. Ще докажем с индукция по m, че това са точно квадратичните остатъци всеки броен по два пъти.

При $m = 1$ всичко е ясно. Нека твърдението е вярно за някое m и нека $1 \leq i < j \leq p$ са произволни. Имаме, че $i^{2^{m+1}} - j^{2^{m+1}} = (i^{2^m} - j^{2^m})(i^{2^m} + j^{2^m})$ Ясно е, че p не дели $i^{2^m} + j^{2^m}$, съгласно добре известния факт, че ако просто число $p = 4k + 3$ дели $x^2 + y^2$, то p дели x и y. Следователно p дели $i^{2^{m+1}} - j^{2^{m+1}}$ тогава и само тогава, когато p дели $i^{2^m} - j^{2^m}$. Понеже съгласно индукционната хипотеза $1^{2^m}, 2^{2^m}, \ldots, p^{2^m}$ са квадратичните остатъци, то лесно се вижда, че $1^{2^{m+1}}, 2^{2^{m+1}}, \ldots, p^{2^{m+1}}$, които също са квадрати, всъщност е пермутация на същите остатъци, т.е. доказахме твърдението за $m + 1$. Това означава (прилагаме доказаното за $m = 2011$), че произволни просто число от вида $4k + 3$ дели член на редицата.

Оценяване. За формулиране на основното твърдение (Да разгледаме $1^{2^m}, 2^{2^m}, \ldots, p^{2^m}$. Ще докажем с индукция по m, че това са точно квадратичните остатъци всеки броен по два пъти.), без доказателство – 3 т.; за разглеждане на квадратични остатъци, без придвижване към решение – 1 т.

За други подходи – според доказаното.

Задачите са предложени от: 11.1, 11.2, 11.4 – Емил Колев; 11.3, 11.6 – Александър Иванов; 11.5 – Николай Николов

Задача 12.1. Допирателните към точки A и B от графиката на функцията $y = x^2$ се пресичат в точка C така, че $\triangle ABC$ е равностранен. Да се намери дължината на отсечката AB.

Решение. (2 т.) Ако $A = (a, a^2)$ и $B = (b, b^2)$, то съответните допирателни са $y - a^2 = 2a(x - a)$ и $y - b^2 = 2b(x - b)$ (понеже $(x^2)' = 2x$). Тогава за $C = (c_1, c_2)$ имаме, че $2c_1 - a^2 = 2bc_1 - b^2$, откъдето $c_1 = \frac{a+b}{2}$ и $c_2 = ab$. (2 т.) Сега от

$$(a - \frac{a+b}{2})^2 + (a^2 - ab)^2 = AC^2 = BC^2 = (b - \frac{a+b}{2})^2 + (b^2 - ab)^2$$

следва, че $|a^2 - ab| = |b^2 - ab|$. Ако $a^2 - ab = ab - b^2$, то $(a - b)^2 = 0$ – противоречие. Значи $a^2 - ab = b^2 - ab$, т.е. $a = -b$. (3 т.) Можем да считаме, че $a > 0$ и тогава $\measuredangle ACB = 60^\circ$ точно когато ъгълът между допирателната през A и Ox е 60° (защото $AB||Ox$ и $AC = BC$). Оттук $AB = 2a = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

Задача 12.2. Точките O и I са съответно център на описаната и вписаната окръжност за триъгълник ABC. Ъглополовящата на ъгъл ACB пресича описаната около триъгълника окръжност в точка D. Ако r е радиусът на вписаната окръжност, $OI = r$ и $ID = 2r$, да се намери $\sin \sphericalangle ACB$.

Виж зад. 11.2.

Задача 12.3. Дадени са естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Да се докаже, че твърдението:

За всяко естествено число n произведението $\binom{n}{a_1}\binom{n}{a_2}\ldots\binom{n}{a_{2011}}$ се дели на n, е вярно тогава и само тогава, когато най-големия общ делител на числата $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ е равен на 1.

Виж зад. 11.3.

Задача 12.4. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, $\sphericalangle BAC < 90^\circ$, $\sphericalangle ABC \neq 90^\circ$ и точка M е среда на AC. Да се докаже, че $\sphericalangle BMD = 2 \sphericalangle BAD$ тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $AB.CD = AD.BC$.

Решение. Нека $\sphericalangle BAC = \alpha$ и O е центърът на окръжността. От $\sphericalangle ABC \neq 90^\circ$ следва, че $O \neq M$ и без ограничение приемаме, че O е във вътрешността на $\triangle ABC$. Ако $\sphericalangle BMD = 2\alpha$, то от $\sphericalangle BOD = 2\alpha$ следва, че точките M, O, B и D лежат на една окръжност. Тогава

$$\sphericalangle OMB = \sphericalangle ODB = 90^\circ - \alpha$$

и следователно $\sphericalangle BMC = \sphericalangle OMC - \sphericalangle OMB = 90^\circ - \sphericalangle OMB = \alpha$. Сега от подобието $\triangle MCB \sim \triangle ADB$ намираме $\dfrac{MC}{CB} = \dfrac{AD}{DB}$. Тъй като $MC = \dfrac{1}{2}AC$, последното е еквивалентно на $AC.BD = 2AD.BC$. От теоремата на Птолемей имаме $AC.BD = AD.BC + AB.CD$, откъдето следва $AB.CD = AD.BC$.

Обратно, ако $AB.CD = AD.BC$, то $AC.BD = 2AD.BC$, откъдето $\triangle MCB \sim \triangle ADB$ и $AC.BD = 2AB.CD$, откъдето следва $\triangle AMB \sim \triangle DCB$. От горните подобия следва, че $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMD = \sphericalangle BCD = 180^\circ - \alpha$, т.е. $\sphericalangle BMC = \sphericalangle DMC = \alpha$, откъдето $\sphericalangle BMD = 2\alpha$.

Оценяване. За правата посока – 4 т.(за доказване, че M, O, B и D лежат на една окръжност – 1 т.; за $\sphericalangle BMC = \sphericalangle DMC = \alpha$ – 1 т.; за подобието на триъгълниците $\triangle MCB \sim \triangle ADB$ – 1 т.; за използване на Птоломей – 1 т.); За обратната посока – 3 т. (за използване на Птоломей за доказване на $\triangle MCB \sim \triangle ADB$ и $\triangle AMB \sim \triangle DCB$ – 2 т.; за довършване – 1 т.)

Задача 12.5. Дадени са естествени числа n и k, за които $n \geq 3$ и $1 \leq k \leq n - 2$. В група от n човека има точно k двойки хора, които се познават. Да се докаже, че от тази група могат да се изберат $n - k + 1$ човека, двама от които се познават, като всеки от двамата познати не познава никой от останалите $n - k - 1$ от избраните.

Решение. Ще докажем задачата с индукция по $n \geq 3$. При $n = 3$ имаме $k = 1$ и твърдението е вярно, тъй като цялата група има исканото свойство.

Да допуснем, че твърдението е вярно за група от $n - 1$ човека.

Ще го докажем за група от n човека.

Ако $k = 1$, цялата група от n човека е търсената. Нека $k > 1$.

Да допуснем, че има човек A, който познава само един от останалите. Групата, получена след премахване на A е от $n - 1$ човека и познанствата са $k - 1$ и твърдението следва от индукционната допускане.

Тъй като $2n > 2(n - 2) \geq 2k$, то не е възможно всеки да има поне двама познати. Следователно има човек A без познати. Ако $k = n-2$, то A заедно с двама, които се познават дава търсената група. Ако k не е $n - 2$, махаме A и получаваме задачата за $n - 1$ човека и k познати. Според индукционното допускане съществува група от $n - 1 - k + 1 = n - k$ човека с исканото свойство. Остава да добавим A към тази група.

Оценяване. За частни случаи, като $k = 1$ или $k = n - 2$ – 1 т.; за опити за индукция – 1 т.; за междинни резултати при използване на индукция – максимум 4 т. (в този случай предните точки не се добавят).

Задача 12.6. Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството на положителните реални числа. Да се докаже, че за всяка неконстанта функция $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ съществуват числа x, y и $z > 0$, за които е изпълнено неравенството

$$(f(x) + f(y) - 2f(xy)).(f(x) + f(z) - 2f(xz)) < 0.$$

Решение. Да допуснем противното. Тогава са възможни два случая.

1. (2 т.) $f(x) + f(y) \geq 2f(xy)$ за произволни $x, y > 0$. При $y = 1$ следва, че $f(x) \leq f(1)$ за всяко $x > 0$. Тогава $2f(1) \geq f(x) + f(1/x) \geq 2f(1)$ и значи $f(x) = f(1)$ за всяко $x > 0$.

2. (3 т.) Съществува $x > 0$ такова, че (1) $f(x) + f(y) \leq 2f(xy)$ за всяко $y > 0$. При $y = 1$ следва, че $f(x) \geq f(1)$. Нека $m = \inf_{\mathbb{R}^+} f$ и $(a_n) \subset \mathbb{R}^+$ така, че $f(a_n) \to m$. При $y_n = a_n/x$ имаме, че $2m \leq f(x) + f(y_n) \leq f(xy_n) \to 2m$ и значи $f(x) = m = f(1)$ за всяко $x > 0$, за което (1) е в сила.

(2 т.) Ако този случай съществува $x > 0$ такова, че (2) $f(x) + f(y) \geq 2f(xy)$ за всяко $y > 0$, то при $y = 1$ следва, че $m = f(1) \geq f(x) \geq m$ и значи $f(x) = f(1)$ за всяко $x > 0$, за което (2) е в сила.

И в двата случая получихме, че f е константа – противоречие.

Забележка. Не ни е известно дали твърдението е вярно за $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Задачите са предложени от: 12.1, 12.6 – Николай Николов; 12.2 – Емил Колев; 12.3, 12.4, 12.5 – Александър Иванов