

Министерство на образованието,
младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, първи ден, 8 април 2012 г.

Тема за 10. клас

Задача 1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението

$$\sqrt[3]{1+3^x} + \sqrt[3]{1-3^x} = a$$

има решение.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$. Външновписаната окръжност към страната BC има център J и се допира до правите AB и AC съответно в точки E и F . Ако BJ и CJ пресичат EF съответно в точки P и Q , и $BC = 2PQ$, да се намери $\sphericalangle BAC$.

Задача 3. Нека a е естествено число, а p е просто число. Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа n , за които числото $a^{p^n} + p^n$ има поне два различни прости делителя.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.