

Министерство на образованието,
младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, първи ден, 8 април 2012 г.

Тема за 12. клас

Задача 1. Да се намерят всички цели стойности на параметъра a , за които уравнението

$$\sin x + a \sin 2x + \sin 5x = 2a$$

има решение.

Задача 2. В остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър H и среда M на страната AB , ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ пресича HM в точка T . Да се докаже, че:

а) $\frac{HT}{TM} = \frac{2 \cos \gamma}{1 - \cos \gamma}$, където $\gamma = \sphericalangle ACB$.

б) H лежи на отсечката с краища петите на перпендикулярите от T към AC и BC .

Задача 3. Естествените числа са оцветени в два цвята.

а) Да се докаже, че съществуват безбройно много двойки от различни едноцветни числа x и y , за които $x + y$ е точен квадрат.

б) Вярно ли е, че винаги съществуват две различни едноцветни числа x и y , чиито сбор е степен на двойката?

Време за работа: 4 часа и 30 минути.