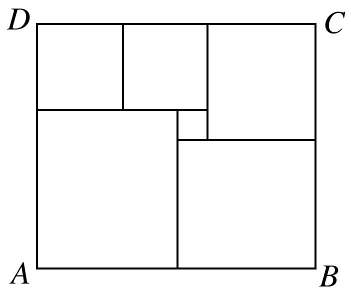
## РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ

**Задача 4.1.** *Дуорите* са същества, които имат два рога, а *хепторите* имат 7 рога. В едно стадо имало и от двата вида същества, а общият брой на рогата им бил 16. Колко дуори и хептори е имало в това стадо?

*Решение*: Веднага се вижда, че стадото би могло да се състои от 8 дуори, тъй като $8\times 2=16$. Но по условие в стадото има поне един хептор, така че броят на дуорите в него е по-малък или равен на 7 **(2 т.)**. Общият брой на дуорите не може да е равен или по-голям от 5, тъй като $16-2\times 5=6$, а по условe хепторът има 7 рога **(2 т.)**. Тогава броят на дуорите в стадото може да е 1, 2, 3 или 4. **(1 т.)** С последователна проверка установяваме, че в това стадо трябва да има точно 1 дуор и два хептора. **(2 т.)**

**Задача 4.2.** Даден правоъгълник $ABCD$ е съставен от шест квадрата, както е показано на чертежа. Намерете обиколката на правоъгълника, ако дължината на страната му $AB$ е 546 см.




*Решение*: Да означим с $a$ см дължината на страната на двата еднакви квадрата в горния ляв ъгъл на правоъгълника $ABCD$, а с $b$ см – дължината на страната на най-малкото квадратче. Тогава дължината на страната на най-големия квадрат в долния ляв ъгъл е $(2a-b)$ см **(1 т.)**. Дължината на страната на квадрата в горния десен ъгъл е $(a+b)$ см **(1 т.)**, а дължината на квадрата в долния десен ъгъл е $(a+2b)$ см **(1 т.)**. Оттук за дължината на страната на най-големия квадрат получаваме, че е равна и на $(a+2b)+b=(a+3b)$ см **(1 т.)**. Следователно $2a-b=a+3b$, откъдето $a=4b$ см **(1 т.)**. Сега $CD=2a+a+b=13b$, $AD=a+a+3b=11b$ и обиколката на правоъгълника е $48b$ **(1 т.)**. От условието намираме $13b=546$, т.е. $b=42$ см и следователно търсената обиколка е $48.42=2016$ см **(1 т.)**.

**Задача 4.3.** Във всяко квадратче на таблица $3\times 3$ е записано числото 1. Казваме, че 3 квадратчета от таблицата образуват *тройка*, ако никои 2 от тях не са в един и същи ред или стълб. Извършва се следната операция: избира се *тройка* и към числата в квадратчетата от *тройката* се прибавя едно и също число.

| | | |
|---|---|---|
| **1** | **1** | **1** |
| **1** | **1** | **1** |
| **1** | **1** | **1** |

а) Колко са различните *тройки*?

б) Проверете, че каквато и *тройка* да вземем, можем да намерим друга *тройка* така, че двете *тройки* да имат общо квадратче.

в) Възможно ли е след многократно прилагане на операцията числата във всички квадратчета на таблицата да се окажат различни?

*Решение*: а) Да номерираме квадратчетата на таблицата с числата от 1 до 9, както е показано. Избирането на *тройка* може да стане по 6 различни начина **(1 т.)**.

| | | |
|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** |
| **4** | **5** | **6** |
| **7** | **8** | **9** |

Едно примерно доказателство е с изчерпване на възможностите. Например, квадратчето с № 1 може да бъде комбинирано с квадратчетата с номера 5 и 9 или с квадратчетата с номера 6 и 8. Разсъждавайки по същия начин за квадратчетата с номера 2 и 3, получаваме всички възможни *тройки*:

(1,5,9); (1,6,8); (2,4,9); (2,6,7); (3,4,8) и (3,5,7). **(1 т.)**

б) Когато тройките са изписани, например както в а), проверката се състои в отбелязване, че първите две *тройки* имат общо квадратче № 1, третата и четвъртата *тройка* имат общо квадратче № 2, а петата и шестата *тройка* имат общо квадратче № 3. **(1 т.)**

в) Да подредим *тройките* по произволен начин и да ги номерираме с I, II, III, IV, V и VI. Използването на римски числа не е задължително. Номерирането може да бъде направено например с думи или с арабски цифри, но трябва да се осъзнава разликата с номерацията на квадратчетата в таблицата. Едно възможно подреждане е да се използва реда в а) и съответното номериране е следното:

I = (1,5,9); II = (1,6,8); III = (2,4,9); IV = (2,6,7); V = (3,4,8) и VI = (3,5,7). **(1 т.)**

От б) следва, че операцията от условието на задачата трябва да се прилага към всяка тройка различен брой пъти **(1 т.)**. По-долу е описано едно примерно многократно прилагане на операцията, което води до искания резултат.

Към квадратчетата от I не прилагаме операцията и таблицата запазва

| | | |
|---|---|---|
| **1** | **1** | **1** |
| **1** | **1** | **1** |
| **1** | **1** | **1** |

А

| | | |
|---|---|---|
| **11** | **1** | **1** |
| **1** | **1** | **11** |
| **1** | **11** | **1** |

Б

| | | |
|---|---|---|
| **11** | **101** | **1** |
| **101** | **1** | **11** |
| **1** | **11** | **101** |

В

| | | |
|---|---|---|
| **11** | **1101** | **1** |
| **101** | **1** | **1011** |
| **1001** | **11** | **101** |

Г

| | | |
|---|---|---|
| **11** | **1101** | **10 001** |
| **10 101** | **1** | **1011** |
| **1001** | **10 011** | **101** |

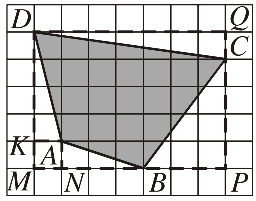
Д

| | | |
|---|---|---|
| **11** | **1101** | **110 001** |
| **10 101** | **100 001** | **1011** |
| **101 001** | **10 011** | **101** |

Е

първоначалния си вид, означен с А. Към квадратчетата от II прилагаме операцията 10 пъти, като всеки път прибавяме числото 1. Таблицата приема вида, означен с Б. Към квадратчетата от III прилагаме операцията 100 пъти, като всеки път прибавяме числото 1. Таблицата приема вида, означен с В. Към квадратчетата от IV прилагаме операцията 1000 пъти, като всеки път прибавяме числото 1. Таблицата приема вида, означен с Г. Към квадратчетата от V прилагаме операцията 10 000 пъти, като всеки път прибавяме числото 1. Таблицата приема вида, означен с Д. Накрая към квадратчетата от VI прилагаме операцията 100 000 пъти, като всеки път прибавяме числото 1. Таблицата приема вида, означен с Е. Сега е достатъчно да забележим, че и деветте числа са различни. **(2 т.)** Посоченото решение не е единствено.

**Задача 5.1.** Правоъгълникът на чертежа е съставен от еднакви квадратчета с дължина на страната цяло число сантиметри и има лице 252 кв.см. Да се намери лицето на четириъгълника *ABCD*.




*Решение*: Правоъгълникът от условието на задачата се състои от $9.7 = 63$ малки квадратчета и следователно лицето на едно квадратче е 252 : 63 = 4 кв.см. Тогава дължината на страната на едно квадратче е 2 см **(1 т.)**. За търсеното лице $S$ имаме: $S = S_{MPQD} - \left(S_{MNAK} + S_{NBA} + S_{BPC} + S_{CQD} + S_{KAD}\right)$. **(2 т.)**

Последователно намираме: $S_{MPQD} = 7.5.4 = 140$ кв. см, $S_{MNAK} = 4$ кв. см, $S_{NBA} = 6$ кв. см, $S_{BPC} = 24$ кв. см, $S_{CQD} = 14$ кв. см и $S_{KAD} = 8$ кв. см. **(3 т.)** Следователно $S = 140 - (4 + 6 + 24 + 14 + 8) = 84$, $S = 84$ кв. см. **(1 т.)**

**Задача 5.2.** Госпожата по математика даде следната домашна работа:

“Всеки да измисли задача с дроби, в която да участва числото 2012.“ Христо измисли следната задача: “Да се намери сумата на всички правилни, несъкратими, обикновени дроби със знаменател 2012.“ Задачата на брат му Петър беше: “Намерете сумата 0,0001 + 0,0002 + ... + 0,2012.“

Решете съставените от братята задачи и намерете коя от търсените суми е по-голяма и с колко.

*Решение*: Първо ще пресметнем числото на Петър. Групираме числата по две в 2012 : 2 = 1006 групи по следния начин (първото с последното събираемо, второто с предпоследното събираемо и т. н.):

0,0001 + 0,0002 + 0,0003 + ... + 0,2011 + 0,2012 =

= (0,0001 + 0,2012) + (0,0002 + 0,2011) +... + (0,1006 + 0,1007) = 1006.0,2013 = 202,5078 **(2 т.)**. За да пресметнем числото на Христо, първо трябва да изброим колко дроби ще събираме. Понеже 2012 = 4.503, то всички дроби с числител четно число и знаменател 2012 ще са съкратими. Да обърнем внимание, че 503 е просто число. Съкратими ще са още и дробите с числител 503 и 3.503. **(1 т.)** Следователно дробите, които събираме, са с числители нечетни числа, по-малки от 2012 и различни от 503 и 3.503, т.е. възможните числители са 1, 3, ..., 501, 505, ..., 1507, 1511, ..., 2011, които са общо $2012 : 2 - 2 = 1004$ на брой **(1 т.)**. Отново можем да групираме по двойки:

$$\frac{1}{2012} + \frac{2011}{2012} = \frac{3}{2012} + \frac{2009}{2012} = ..... = 1,$$ като липсва само $\frac{503}{2012} + \frac{1509}{2012}$ **(1 т.)**.

Следователно търсената сума е 1004 : 2 = 502, което е и числото на Христо **(1 т.)**. Разликата на двете суми е 502 – 202,5078 = 299,4922 **(1 т.)**.

**Задача 5.3.** В ребуса **КУЧЕ + ЗА + ЛОВ = 2012 + *n*** на различните букви в лявата страна съответстват различни цифри от 1 до 9 (без 0), а $n$ е произволно естествено число.

а) Да се намери най-малкото естествено число *n***,** за което ребусът има решение.

б) Ако $n = 2011$, намерете най-голямата възможна стойност на **КУЧЕ**, за която ребусът има решение.

*Решение*: а) Лявата страна има 9 различни букви, което означава, че всяка цифра от 1 до 9 се среща точно по веднъж. Следователно остатъкът при деление с 9 на лявата страна е равен на остатъка при делението на 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 с 9. Заключаваме, че лявата страна се дели на 9 **(1 т.)**. Така получаваме, че ако ребусът има решение, то $n$ е поне 4 (2016 се дели на 9) **(1 т.)**. Остава да дадем пример при $n = 4$. Ето един: 1372 + 596 + 48 = 2012 + 4 **(2 т.)**.

б) Ясно е, че най-голямата възможна стойност на К е 3. За отхвърляне с проверки на случаите У = 9 и У = 8 по **(1 т.)**. За намиране на решението КУЧЕ = 3796 и показан пример 3796 + 42 + 185 = 4023 **(1 т.)**.

**Задача 6.1.** Пирамида има височина $h$ м и основа – правоъгълен триъгълник с катети $a$ м и $b$ м. Пресметнете обема на пирамидата, ако:

$$a=7\frac{7}{24}+\frac{15}{7.(-2)^2}-0,1:0,024+\frac{5}{56}(-3)^3,\ b=\frac{35^5(-15)^2(-6)^7}{(-14)^5 15^8} \text{ и } h=\frac{-3,206-1,344}{1,821-5,071}.$$

*Решение*: Имаме $a=\frac{175}{24}+\frac{15}{28}-\frac{100}{24}-\frac{135}{56}=\frac{75}{24}-\frac{105}{56}=\frac{25}{8}-\frac{15}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$ **(2 т.)**;

$b=\frac{35^5 6^7}{14^5 15^6}=\frac{5^5 7^5 2^7 3^7}{2^5 7^5 3^6 5^6}=\frac{12}{5}$ **(2 т.)**; $h=\frac{-4,55}{-3,25}=\frac{91}{65}=\frac{7}{5}$ **(2 т.)**;

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{12}{5}\cdot\frac{7}{5}=0,7 \text{ куб. м}$$ **(1 т.)**.

**Задача 6.2.** Георги трябвало да умножи $11^3$ с трицифреното число $T$, чиято цифра на единиците е два пъти по-голяма от цифрата на десетиците, а цифрата на стотиците му е с 5 по-голяма от цифрата на десетиците. Но той сгрешил при умножението и разменил мястото на единиците и десетиците на $T$. Така получил резултат, с 11979 по-голям от верния. Намерете $T$.

*Решение*: Нека цифрата на десетиците на $T$ е $x$, така че $T=100(x+5)+10x+2x$ **(1 т.)**, а объркаността число е $100(x+5)+20x+x$ **(1 т.)**. Тогава $11^3.(21x-12x)=11979$, откъдето $x=1$ **(4 т.)**. Следователно търсеното число е 612 **(1 т.)**.

**Задача 6.3.** В магазин има дини по 5 кг, пъпеши по 2 кг и сливи по 50 г. Плодовете общо са 200 и тежат 100 кг. По колко плода от всеки вид може да има?

*Решение*: Ако има $d$ дини, $p$ пъпеша и $s$ сливи, то $d+p+s=200$ **(1 т.)**. Масата в грамове е $5000d+2000p+50s=100000$, което след деление на 50 води до $100d+40p+s=2000$ **(1 т.)**. Изваждайки първото уравнение, получаваме $99d+39p=1800$ и след деление на 3 имаме $33d+13p=600$ **(1 т.)**. Понеже сборът и първото събираемо се делят на 3, трябва $p=3q$ за някое цяло $q\geq 0$ **(1 т.)**. Заместваме и съкращаваме: $11d+13q=200$ **(1 т.)**. С непосредствена проверка откриваме решенията $(d;q)=(4;12)$ и $(17;1)$. Окончателно отговорите са $(d;p;s)=(4;36;160)$ **(1 т.)** и $(17;3;180)$ **(1 т.)**.

**Задача 7.1.** Да се намерят всички цели решения на уравнението $2xy+x-2y=2012$.

*Решение*: Представяме уравнението във вида:

$$2xy+x-2y=2012 \Leftrightarrow 2xy+x-2y-1=2011 \Leftrightarrow (x-1)(2y+1)=2011.$$ **(3 т.)**

Понеже 2011 е просто и търсим цели решения, имаме следните възможности:

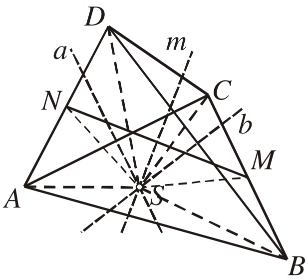
1) $x-1=2011,\ 2y+1=1 \Rightarrow x=2012,\ y=0;$ **(1 т.)**

2) $x-1=1,\ 2y+1=2011 \Rightarrow x=2,\ y=1005;$ **(1 т.)**

3) $x-1=-2011,\ 2y+1=-1 \Rightarrow x=-2010,\ y=-1;$ **(1 т.)**

4) $x-1=-1,\ 2y+1=-2011 \Rightarrow x=0,\ y=-1006.$ **(1 т.)**

**Задача 7.2.** В четириъгълника $ABCD$ страните $BC$ и $AD$ са равни, а точките $M$ и $N$ са техните среди. Да се докаже, че симетралите на $AC$, $BD$ и $MN$ се пресичат в една точка.




*Решение*: Нека $a$ и $b$ са симетралите на $AC$ и $BD$ и $a \cap b = S$. **(1 т.)** От $SA = SC$, $SB = SD$ и $BC = AD$ следва, че $\Delta ADS \cong \Delta CBS$ (III пр.) **(3 т.)**, откъдето $\sphericalangle DAS = \sphericalangle BCS$. Следователно $\Delta ANS \cong \Delta CMS$ (I пр.) **(2 т.)**. Оттук $SN = SM$, т.е. точката $S$ е от симетралата $m$ на $MN$. **(1 т.)**

**Задача 7.3.** В квадрат $3\times 3$, съставен от 9 малки квадратчета, във всяко квадратче е записано всяко едно от числата от 1 до 9. За всеки от четирите подквадрата $2\times 2$ е пресметнат сборът от записаните числа. Най-малкият от четирите сбора наричаме характеристика на квадрата. Да се намери най-голямата възможна характеристика на квадрата.

| | | |
|---|---|---|
| $a_1$ | $b_1$ | $a_2$ |
| $b_2$ | $c$ | $b_3$ |
| $a_3$ | $b_4$ | $a_4$ |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 7 | 2 |
| 8 | 9 | 6 |
| 3 | 5 | 4 |

*Решение:* Нека $x$ е характеристиката на квадрата. Да намерим сборовете на числата в четирите подквадрата и да ги съберем. В получения сбор числата $a_i$, които стоят в ъглите на квадрата, участват по 1 път, числата $b_i$, които стоят в средата на страните – по 2 пъти и числото $c$, което е в центъра на квадрата – 4 пъти. **(2 т.)** Понеже $x$ е най малкият сбор имаме $4x \le (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + 2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + 4c$. **(1 т.)** Тъй като търсим най-голямата възможна стойност на $x$, получаваме $4x \le (1+2+3+4) + 2(5+6+7+8) + 4.9 = 98$, т.е. $x \le \frac{98}{4} = 24\frac{1}{2}$. **(1 т.)** Но $x$ е естествено число и следователно $x \le 24$. **(1 т.)** Вдясно е показан пример на квадрат с характеристика 24. **(2 т.)**

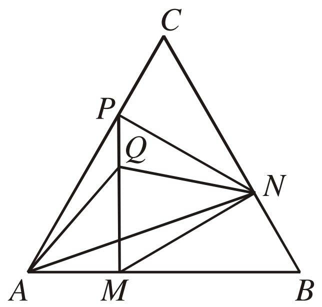
**Задача 8.1.** Сред учениците от 8 клас на едно училище провели анкета – кой обича да гледа футбол и кой – баскетбол. Оказало се, че 90% от любителите на футбола обичат и баскетбол, а 72% от любителите на баскетбола обичат и футбол. От запитаните 10% не обичат нито футбол, нито баскетбол. Колко процента от анкетираните обичат само един спорт? Какъв е възможно най-малкият брой анкетирани?

*Решение*: Нека $x$% обичат футбол и $y$% – баскетбол. Тогава от условието получаваме системата:

$$\left| \begin{array}{l} 0,9x = 0,72y \\ 10 + y + (1-0,9)x = 100 \end{array} \right. \textbf{(2 т.)}.$$

Имаме $\left| \begin{array}{l} 0,9x = 0,72y \\ 10 + y + (1-0,9)x = 100 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{9}{10}x = \frac{72}{100}y \\ 10 + y + 0,1x = 90 \end{array} \right.$, откъдето намираме $x = \frac{200}{3}\%$ и $y = \frac{250}{3}\%$ **(2 т.)**. Процентът на тези, които обичат само един спорт, е $0,1x + 0,28y = 30\%$ **(1 т.)**. Броят на анкетираните трябва да се дели на 10 и 30 **(1 т.)**. Най-малкият възможен брой анкетирани е 30. Наистина, ако са анкетирани 30 ученици, то любителите на футбола са $\frac{30.200}{3.100} = 20$, любителите на баскетбола са $\frac{30.250}{3.100} = 25$, а 18 обичат и двата спорта **(1 т.)**.

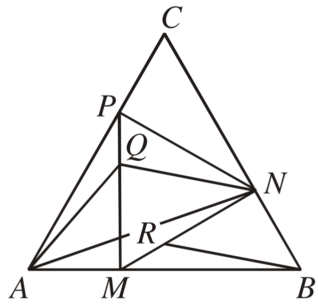
**Задача 8.2.** Върху страните $AB$, $BC$ и $AC$ на равностранния триъгълник $ABC$ са взети съответно точки $M$, $N$ и $P$ такива, че $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{BN}{NC}=\dfrac{CP}{PA}=\dfrac{1}{2}$. Върху отсечката $PM$ е взета точка $Q$ такава, че $\dfrac{PQ}{QM}=\dfrac{1}{2}$. Да се намерят ъглите на триъгълник $AQN$.



*Решение* 1: Означаваме $\overrightarrow{AM}=x$. Разглеждаме ротация $\rho(A,+60^0)$ **(1 т.)**. Нека $\rho(x)=x_1$ и следователно $\overrightarrow{AB}=3x$, $\overrightarrow{AP}=2x_1$ и $\overrightarrow{AC}=3x_1$. Пресмятаме $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AP}}{3}=\dfrac{x+4x_1}{3}$ и $\overrightarrow{AN}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}=\dfrac{6x+3x_1}{3}$. Следователно

$$\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AQ}=\frac{5x-x_1}{3}.$$

Тогава $\rho(\overrightarrow{QN})=\dfrac{5\rho(x)-\rho(x_1)}{3}=\dfrac{5x_1-(x_1-x)}{3}=\dfrac{4x_1+x}{3}=\overrightarrow{AQ}$ **(3 т.)**. Получаваме, че триъгълник $AQN$ е равнобедрен с ъгли $120^0$, $30^0$ и $30^0$ **(3 т.)**.

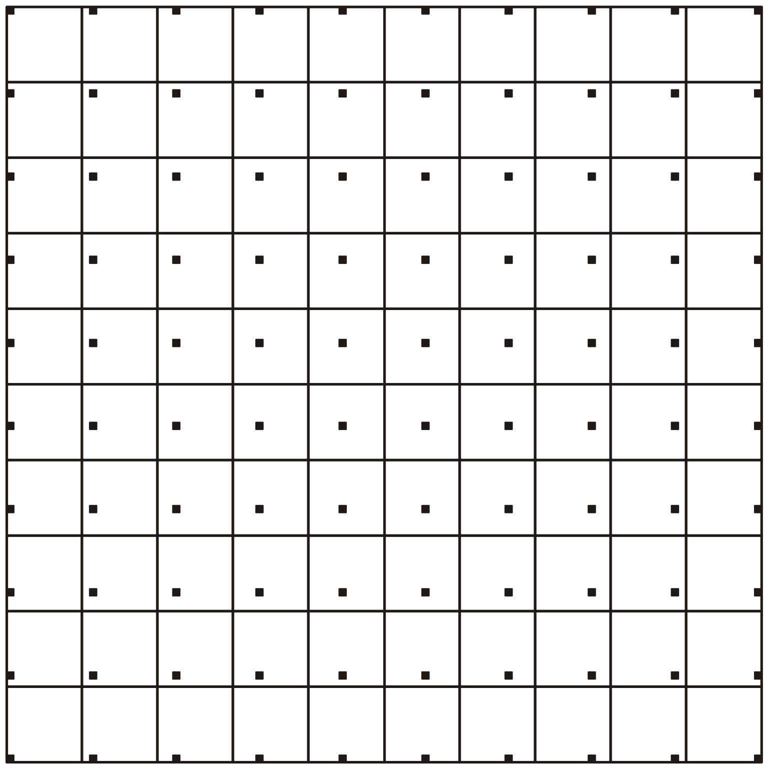


*Решение* 2: Върху отсечката $MN$ избираме точка $R$ такава, че $\dfrac{MR}{RN}=\dfrac{1}{2}$. Нека $PM_1\perp AB$ ($M_1\in AB$). От $\sphericalangle APM_1=30^0$ следва, че $AM_1=\dfrac{1}{2}AP=AM$ и следователно $M_1\equiv M$. Аналогично $MN\perp BC$ и $NP\perp AC$. Получаваме, че $\Delta AMP\cong\Delta BNM\cong\Delta CPN$ **(1 т.)**, откъдето $PM=MN=NP$ и $\sphericalangle AQM=\sphericalangle BRN$. Следователно $\Delta AMQ\cong\Delta BNR$, т.е. $AQ=BR$. Пресмятаме, че $\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MR}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{NB}$ и заключаваме, че $RBNQ$ е успоредник, откъдето $QN=BR=AQ$ **(2 т.)**. От друга страна $\sphericalangle NQR=\sphericalangle NBR=90^0-\sphericalangle BRN$. Оттук $\sphericalangle AQM+\sphericalangle NQR=\sphericalangle BRN+90^0-\sphericalangle BRN=90^0$ **(1 т.)**. Нека $QR_1\perp MN$ ($R_1\in MN$). От $\sphericalangle MQR_1=30^0$ следва, че $MR_1=\dfrac{1}{2}MQ=\dfrac{1}{2}RN=MR$ и значи $R_1\equiv R$. Следователно $\sphericalangle AQN=120^0$ **(2 т.)**, а другите два ъгла са по $30^0$ **(1 т.)**.

**Задача 8.3.** Нека $ABCD$ е квадрат с дължина на страната 10. Да се намери максималният брой точки, които могат да бъдат разположени във вътрешността на квадрата, така че всеки квадрат с дължина на страната 1 и страни, успоредни на страните на $ABCD$, да съдържа (включително по контура си) най-много 4 точки.

*Решение*: Да разгледаме координатна система с начало точката $A$ и такава, че точката $B$ има координати $(10,0)$, точката $C$ има координати $(10,10)$, а точката $D$ има координати $(0,10)$. Да разгледаме квадратите с върхове в точките с координати $(i,j)$, $(i+1,j)$, $(i+1,j+1)$ и $(i,j+1)$ за цели $0\le i,j\le 9$. Тези квадрати са с дължина на страната, равна на 1 и страните им са успоредни на страните на квадрата $ABCD$. Следователно всеки един от тях може да съдържа най-много 4 от точките. Тъй като квадратите са общо 100 и покриват напълно $ABCD$, в $ABCD$ не могат да бъдат разположени повече от 400 точки, удовлетворяващи условието на задачата **(3 т.)**.

Ще докажем, че в $ABCD$ могат да бъдат разположени 400 точки, удовлетворяващи условието на задачата. Да забележим, че един квадрат с дължина на страната 1 и страни, успоредни на страните на $ABCD$, съдържа две точки $E$ и $F$ с координати съответно $(x_E, y_E)$ и $(x_F, y_F)$ тогава и само тогава, когато $|x_E - x_F| \leq 1$ и $|y_E - y_F| \leq 1$. Да разгледаме квадратчетата с върхове в точките с координати, $\left(i+\frac{i}{10}, j+\frac{j}{10}\right)$, $\left(i+\frac{i+1}{10}, j+\frac{j}{10}\right)$, $\left(i+\frac{i+1}{10}, j+\frac{j+1}{10}\right)$ и $\left(i+\frac{i}{10}, j+\frac{j+1}{10}\right)$ за цели $0 \leq i, j \leq 9$. Тези квадратчета са общо 100 на брой и имат дължина на страната $\frac{1}{10}$. Нека изберем по 4 точки от вътрешността на всяко едно от тях. Така сме избрали общо 400 точки от вътрешността на $ABCD$ **(2 т.)**.



Да допуснем, че квадрат с дължина на страната 1 и страни, успоредни на $ABCD$, съдържа повече от 4 точки. Тогава той съдържа точка $E$ с координати $(x_E, y_E)$ от квадратче с върхове $\left(i+\frac{i}{10}, j+\frac{j}{10}\right)$, $\left(i+\frac{i+1}{10}, j+\frac{j}{10}\right)$, $\left(i+\frac{i+1}{10}, j+\frac{j+1}{10}\right)$ и $\left(i+\frac{i}{10}, j+\frac{j+1}{10}\right)$, и точка $F$ с координати $(x_F, y_F)$ от квадратче с върхове $\left(k+\frac{k}{10}, s+\frac{s}{10}\right)$ $\left(k+\frac{k+1}{10}, s+\frac{s}{10}\right)$, $\left(k+\frac{k+1}{10}, s+\frac{s+1}{10}\right)$ и $\left(k+\frac{k}{10}, s+\frac{s+1}{10}\right)$, като $i, j, k$ и $s$ са цели числа и $(i, j) \neq (k, s)$. Следователно в сила са следните неравенства: $i+\frac{i}{10} < x_E < i+\frac{i+1}{10}$, $j+\frac{j}{10} < y_E < j+\frac{j+1}{10}$, $k+\frac{k}{10} < x_F < k+\frac{k+1}{10}$, $s+\frac{s}{10} < y_F < s+\frac{s+1}{10}$, $|x_E - x_F| \leq 1$ и $|y_E - y_F| \leq 1$. От първите 4 неравенства получаваме

$$i-k+\frac{i-k-1}{10} < x_E - x_F < i-k+\frac{i-k+1}{10}$$

$$j-s+\frac{j-s-1}{10} < y_E - y_F < j-s+\frac{j-s+1}{10}.$$

Оттук и от неравенствата $|x_E - x_F| \leq 1$ и $|y_E - y_F| \leq 1$, получаваме $|11(i-k)| < 11$ и $|11(j-s)| < 11$, откъдето $i = k$ и $j = s$, което противоречи на $(i, j) \neq (k, s)$. Следователно 400-те избрани точки удовлетворяват условието на задачата **(2 т.)**.

*Задачите са предложени, както следва*:

зад. 4.1 – Живко Желев, зад. 4.2 – Иван Ангелов, зад. 4.3 – Светлозар Дойчев, Веселин Ненков и Сава Гроздев;
зад. 5.1 – Теодоси Витанов, зад.5.2 – Ирина Шаркова, зад.5.3 – Иван Ангелов;
зад. 6.1 – Ивайло Кортезов, зад. 6.2 – Ивайло Старибратов, зад. 6.3 – Ивайло Кортезов;
Зад. 7.1, 7.2 и 7.3 – Теодоси Витанов
зад. 8.1 – Теодоси Витанов, зад. 8.2 – Симеон Замковой, зад. 8.3 – Христо Ганчев.